

3.7 Alimentazioni non uniformi

Hp: di simmetria \Rightarrow con $M = 2N + 1$ elem solo $N + 1$ sono indipendenti, infatti se:
 $F(u) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{jnu}$ cioè dividendo a metà
 $F(u) = C_0 + \sum_{m=1}^N C_m (e^{jnu} + e^{-jnu}) = F(u) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^N C_n \cos(nu)$

3.8 Tchebyshev

Proprietà:

- $T(\cos \gamma) = \cos n\gamma$
- $T(\cosh \gamma) = \cosh n\gamma$

Valutiamo il polinomio in una trasformazione di coordinate $F_n(x) = a + b \cos u$

È un *fattore di array simmetrico*, infatti è un polinomio generico: $T_n(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n = \sum_{n=0}^N A_n (a + b \cos u)^n$ calcolandolo in $x = a + b \cos u$ ci sarà il termine con la potenza del binomio e vale:

$T_n(x) = \sum_{m=0}^N \sum_{k=0}^n A_n \binom{n}{k} b^k a^{n-k} \cos^k u$ mentre per il coseno $\cos^k u = \sum_{l=0}^k B_l \cos lu$ cioè

$T_n(x) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k A_n \binom{n}{k} b^k a^{n-k} B_l \cos lu$ che si può raccogliere: $T_N(x) = \sum_{n=1}^N U_n \cos ln + U_0$

e allora: $T_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{U_n}{2} \cos ln + U_0$

cioè $F(u) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^N C_n \cos nu$

Fisso il rapporto $ML/SL = R = T(x_1)$ e si mappa la finestra di visibilità:

- $d < \frac{\lambda}{2}$
- $\frac{\lambda}{2} < d < \lambda$

Nel **caso (1)** trovo $k_0 d < \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi$ cioè

$$\begin{cases} a + b = x_1 \\ a + b \cos k_0 d = -1 \\ T_N(x_1) = R \end{cases}$$

Risolvendo trovo a e b e $x_1 = \cosh \gamma$ su cui vale la condizione del $\cosh \rightarrow \cosh N\gamma = R \rightarrow \gamma = \frac{\text{acos}(R)}{N}$ e allora:

- $x_1 = \cosh \left[\frac{1}{N} \text{acos} R \right]$
- $a = \frac{1+x_1 \cos k_0 d}{\cos k_0 d - 1}$
- $b = -\frac{1+x_1}{\cos k_0 d - 1}$

E allora esistono le formule per trovare i coefficienti, ad esempio: $T_2(a + b \cos u) = (2a^2 + b^2 - 1) + 3ab \cos u + b^2 \cos 2u$

Per calcolare il BW dobbiamo considerare il primo zero del polinomio $\cos N\gamma = 0 \Rightarrow N\gamma = (2l-1)\frac{\pi}{2}$ da cui il primo zero sarà $x_z = \cos \frac{\pi}{2N}$ e identifichiamo

$$\begin{cases} u_z = a \cos \left[\frac{x_z - a}{b} \right] \\ \psi_z = a \cos \left[\frac{u_z}{k_0 d} \right] \end{cases}$$

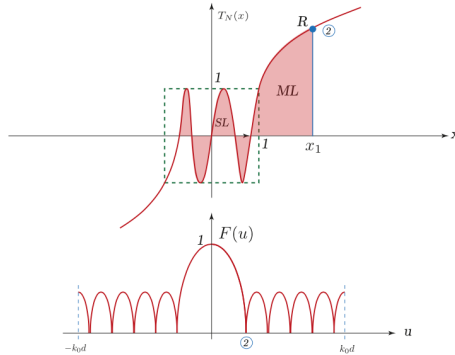
$$\text{Cioè BW} = 2 \left\{ \frac{\pi}{2} - a \cos \left[\frac{\text{acos} \frac{\cos \frac{\pi}{2N} - a}{b}}{k_0 d} \right] \right\}$$

Nel **caso (2)** $k_0 d > \pi$ e $k_0 d < \pi$ ovvero possono esserci fino a quattro valori e devono essere soddisfatte le condizioni:

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a + b \cos k_0 d = 1 \\ a + b = x_1 \\ T_N(x_1) = R \end{cases}$$

Da cui si trova:

- $a = \frac{x_1 - 1}{2}$
- $b = \frac{x_1 + 1}{2}$
- $k_0 d = a \cos \frac{1-a}{b}$ o $k_0 d = 2\pi - a \cos \frac{1-a}{b}$, scegliendo la spaziatura maggiore (BW minore)



3.9 Fourier

Sagomare il fascio $\min \{ |F(u) - A(u)| \}$.

i $\{c_n\}$ sono i coefficienti dello sviluppo in serie di $A(u)$ desiderato sulla base $\cos nu$, cioè $C_n = A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(u) \cos nu du$

Sintesi iterativa (proiezioni), si richiede $M_D(u) \leq F(u) \leq M_U(u)$.

- stima iniziale
- $F(u) = F\{C_n\}$
- si satura alla maschera, dove esce fuori viene indicato come coincidente $\tilde{F} = P_M \cdot F$
- nuovamente sintesi $C_n = \mathcal{F}\{\tilde{F}\}$
- proiezione sui coefficienti di corrente richiedendone la limitazione $\tilde{C}_n = P_I \cdot C_n$
- iterazione fino a convergenza

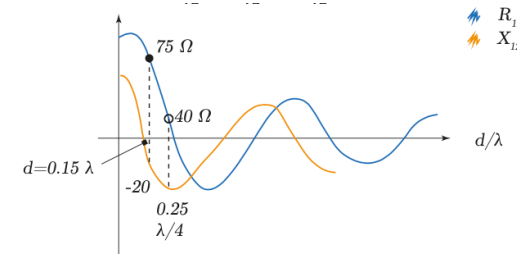
3.10 Yagi-Uda

- driver, $L_D \approx \lambda/2$
- riflettore, aumenta il guad. in direzione del driver, $\approx 1.05 \cdot L_D$
- direttore, aumenta il guad. nella sua direzione, $\approx 0.95 \cdot L_R$

Con **due antenne**, alimentando con I_1 e facendo una rappresentazione ridotta: $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$

auto-impedenza ed impedenza mutua. Con $V_1 = 0$ si trova $I_1 = -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} \cdot I_2$ dove la fase è fattorizzata sulla distanza $\angle I_1 = \angle I_2 + \pi + \alpha d$

\Rightarrow il fattore di array: $F(\psi) = I_2 \left(1 - \left| \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right| e^{j\alpha d} e^{-jk_0 d \cos \psi} \right)$, massimo in 0 e nullo in π , si trova: $d = \frac{\lambda}{4}$ e $|Z_{12}| = |Z_{11}|$.



Per il dipolo $|Z_{11}| = 75\Omega$ ma non è così per l'impedenza mutua che si trova a $40 - j20$ ma non dipende molto dalla distanza quanto più dalla lunghezza. Infatti la risonanza dell'accoppiamento si trova a 0.15λ e allora devo variare la lunghezza del parassita per aumentare la fase reciproca.

Yagi-Uda a **loop**: $C_0 \approx \lambda$, $C_{RIF} = 1.1C_0$ e $C_{DIR} = 0.7 \cdot C_0$.

4 Antenne integrate

4.1 Antenne slot

Teo. equivalenza: campo di apertura E_a :

- chiudiamo l'apertura $K_m = -\hat{n} \times E_a \rightarrow K_m = -E_a \hat{z}$
- togliamo il PEC: $J_m = 2K_m = -2E_a$

\Rightarrow campo lontano:

$$\underline{E}(r) = jk_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_V J_m(r') \times \hat{r} e^{jk_0 \hat{r} \cdot r'} dV'$$

Dove $J_m = K_m \delta(x)$, $\hat{r} \cdot z = |z| \cos \theta$ e $\hat{z} \cdot \hat{r} = (\hat{r} \cos \theta - \theta \sin \theta) \cdot \hat{r} = -\hat{\phi} \sin \theta$. Inoltre $E_a \cdot \Delta y = V(z)$ (corrente magnetica I_m).

Campo lontano:

$$\underline{E}(r) = jk_0 \sin \theta \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} I_m(z) e^{jk_0 z \cos \theta} dz \hat{\phi}$$
 (dipolo magnetico).

Corollario di Brooker

$$Z_D \cdot Z_S = \frac{\eta_0^2}{4}$$

4.2 Slot $\lambda/2$

Ne risulta $Z_S = \frac{\eta_0^2}{4Z_D} \approx 487\Omega$ e la corrente ha un andamento cosinusoidale.

Se invece I_m è **costante** cioè $I_m = -\delta(x) \Delta y E_a \hat{z}$ calcolando l'integrale si trova:

$$E(r) = j \frac{k_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \sin \theta \frac{\sin \left[k_0 \frac{W}{2} \cos \theta \right]}{\cos \theta} \hat{\phi}$$

Conduttanza di radiazione: $P_r = \frac{1}{2} G_s |V|^2 4 \rightarrow G_s = \frac{2P_r}{|V_0|^2}$ e si trova: $G_s = \frac{W}{120\lambda} \left[1 - \frac{1}{24} (k_0 - \Delta y)^2 \right]$

4.3 Patch

Impedenza caratteristica:

$$Z_{0\mu} = \begin{cases} \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_e}} \ln \left(\frac{8h}{w_e} + 0.25 \frac{w_e}{h} \right) & \text{se } \frac{w}{h} < 1 \\ \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_e}} \left[\frac{w_e}{h} + 1.39 + 0.667 \ln \left(\frac{w_e}{h} + 1.44 \right) \right] & \text{se } \frac{w}{h} > 1 \end{cases}$$

Larghezza efficace w_e :

$$\frac{w_e}{h} = \begin{cases} \frac{w}{h} + \frac{1.25}{\pi} \frac{t}{h} \left[1 + \ln \frac{4\pi w}{t} \right] & \text{se } \frac{w}{h} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{w}{h} + \frac{1.25}{\pi} \frac{t}{h} \left[1 + \ln \frac{2h}{t} \right] & \text{se } \frac{w}{h} > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Permittività efficace:

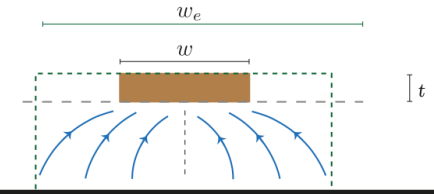
$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} F \left(\frac{w}{h} \right) - c$$

$$\text{dove } F \left(\frac{w}{h} \right) = \begin{cases} \left(1 + \frac{12h}{w} \right)^{-1/2} + 0.04 \left(1 - \frac{w}{h} \right)^2 & \text{se } \frac{w}{h} < 1 \\ \left(1 + \frac{12h}{w} \right)^{-1/2} & \text{se } \frac{w}{h} > 1 \end{cases}$$

$$\text{e } c = \frac{\epsilon_r - 1}{4.6} \frac{t/h}{\sqrt{W/h}}$$

Costante di propagazione: $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = k_0 \sqrt{\epsilon_r}$ cioè

$$\beta = 2\pi \lambda_0 \sqrt{\epsilon_r} \text{ con } \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$



Analizzando la discontinuità, dalle L.D.T: $Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$ ovvero $Y_{in} = Y_0 \frac{Y_0 + Y_L \tan \beta l}{Y_L + Y_0 \tan \beta l}$ cioè

$$Y_{in} = Y_s + Y_0 \frac{Y_s + jY_0 \tan \beta l}{Y_0 + jY_s \tan \beta l}$$

imponendo la risonanza: $\text{Im} \{ Y_{in} \} = 0$ si trova $\tan \beta l = \frac{2Y_0 B_f}{G_s^2 + B_f^2 - Y_0}$ dove $Y_{Ts} = G_s + j \omega C_s$. Cioè si

$$\text{trova che } L \text{ è poco più piccolo di } \lambda/2 \Rightarrow Y_{in} = 2G_s$$

La risonanza dipende dalla lunghezza efficace $L_e = L + 2\Delta L$ con $\frac{\Delta L}{h} = 0.412 \frac{(\epsilon_e + 0.3) \left(\frac{W}{h} + 0.264 \right)}{(\epsilon_e + 0.258) \left(\frac{W}{h} + 0.8 \right)}$ e allora

$$L_e \doteq \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{\epsilon_e}} \Rightarrow L = \frac{c}{f_0 \sqrt{\epsilon_e}} - 2\Delta L$$

Alimentazione coassiale

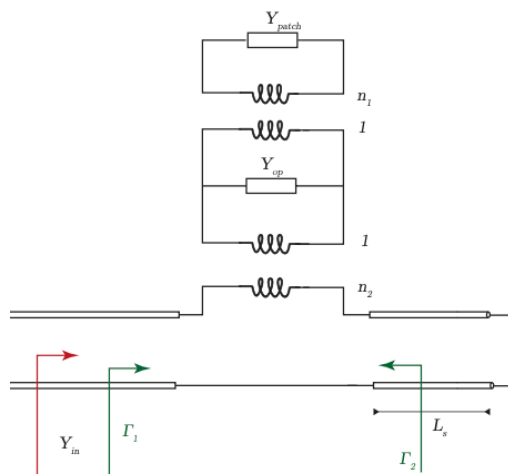
$$R_{in}(l) = \frac{1}{2G_s} \cos^2(\beta_p L_1)$$

Allargamento di banda
Alimentazione a slot

Rapporto di trasmissione $n_1 \approx \frac{L_A}{W}$ e $n_2 = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2)V_m}{V_o}$

- Patch: vista a metà ($L_1 + L_2$) e quindi $Z_P = \frac{1}{\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2}}$ dove $Y_1 = Y_{op} \frac{(G_F + jB_F) + jY_{op} \tan \beta_p L_1}{Y_{op} + j(C_F + jB_F) \tan \beta_p L_1}$
- apertura, due metà in cc, e $Y_{ap} = 2\tilde{Y}$ dove l'impedenza della singola $Y \rightarrow \infty$ e quindi $Y_{ap} = 2 \frac{Y_{os}}{j \tan \beta_s \frac{L_g}{2}}$ approssimabile con l'argomento della cotangente: $Y_{ap} \sim -2jY_{os} \frac{2}{\beta_s L_a}$
- microstriscia e stub

Risolvendo e ricordando i rapporti di trasmissione: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_2}{l_1}$ si trova $\tilde{Y}_1 = Y_p n_1^2$ e $\tilde{Y}_2 = (\tilde{Y}_1 + Y_a) \frac{1}{n_2^2}$
Ovvero ci si riduce alla serie di \tilde{Y}_2 e Y_{stub} , cioè $Z_{in} = \frac{n_2}{Y_p n_1^2 + Y_a} + jZ_{o,m} \cot(\beta L_s)$



Casi particolari: **stub** a $L_s = \frac{\lambda}{4}$ riporta in ingresso un aperto come un c.c. allora per la risonanza $\text{Im}[Y_{in}] = 0$ cioè $n_1^2 B_P = -B_{ap}$ da cui: $B_P = -2jY_{os} \frac{2\beta_s}{L_a} = \frac{4Y_{os}}{\beta_s} \cdot \frac{W^2}{L_a^3} \propto \frac{W^2}{L_a^3}$

5 Antenne in ricezione

Considerando un generico campo trasmesso:

$$E_{TX} = jk_0 \eta_0 I_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} h(\theta, \phi)$$

La tensione sull'antenna ricevente sarà $\propto E^i$ come $V_R(\theta, \phi) = \underline{E}^i(\theta, \phi) \cdot \underline{h}_R(\theta, \phi)$ ma c'è di mezzo il carico \Rightarrow Thevenin $\rightarrow V_L(\omega) = \frac{Z_L(\omega)}{Z_A(\omega) + Z_L(\omega)} (E^i \cdot h)(\omega)$.

La potenza $P_L = \frac{1}{2} \Re\{[Z_L]|I|^2\} = \frac{R_L}{2|R_A + R_L + j(X_A + X_L)|^2} |V_a|^2$ e si cerca adattamento coniugato $\Rightarrow P_{L,max} = \frac{|V_a|^2}{8R_L}$.

Coefficiente di trasmissione in potenza

$$\tau = \frac{P_L}{P_{L,max}} = 4 \frac{R_L R_A}{|Z_L + Z_A|^2} \leq 1$$

5.1 Area efficace

$$A = \frac{\eta_0}{4R_A} |h|^2 \eta_p$$

Per dimostrarla si parte dalla relazione $P_{L,max} = S(\theta, \phi) A(\theta, \phi)$ dove la P_L formula precedente e $S(\theta, \phi) = \frac{1}{2\eta_0} |E^i|^2$ da Poyting, si richiama al PLF

$$\text{come } \eta_p = \frac{|h \cdot E^i|^2}{|E^i|^2 |h|^2} \leq 1$$

$$\text{Cioè: } P_L = S^i A_e \eta_p \tau$$

Per misurarla consideriamo il guadagno dove $P_{in} = \frac{1}{2} R_A |I_g|^2$ e $I(\theta, \phi) = \frac{1}{2\eta_0} r k_0^2 \eta_0^2 \frac{1}{(2\pi)^2 r^2} |h|^2 |I_g|^2$ da cui:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e$$

5.2 Link radio

$$\text{Potenza trasmessa: } S_{TX} = \frac{1}{2\eta_0} \frac{|E_{TX}|^2}{d^2} d^2 = \frac{I_T(\theta, \phi)}{d^2} = \frac{P_{TX} G_{TX}}{4\pi d^2}$$

Mentre la potenza raccolta sarà $P_L = S_T(d) A_{e,R} \eta_p \tau_R$ da cui si arriva alla **formula di Friis**: $\frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \tau_R \eta_p \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2$

Ovvero: $P_L = \underbrace{(P_T G_T)}_{\text{EIRP}} \underbrace{G_R \tau}_{\tilde{G}_R} \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \eta_p$, invertendola

si può trovare la d_{max}
Effective isotropic Radiated Power

$$\text{: EIRP} = G_T \cdot P_T$$

6 Sistemi radar

Scatteratore da cui raccogliamo la potenza $P_c = S^i \sigma$ che verrà ridistribuita sull'angolo solido. Ovvero: $\frac{S^i \sigma}{4\pi r^2} = S^S$. Da cui:

Sezione trasversa di scattering

$$\text{RCS} : \sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(4\pi r^2 \frac{S^S}{S^i} \right)$$

Se quella scatterata è quella che torna al radar: $P_{R \leftarrow T} = S_{R \leftarrow T}(d) \cdot A_{e,R} \cdot \eta_p$ cioè $P_{R \leftarrow T} = \frac{\sigma T S_{R \rightarrow T}}{4\pi d^2} A_{e,R} \eta_p$ dove possiamo sostituire $S_{R \rightarrow T}$ e trovare $\frac{P_{R \leftarrow T}}{P_{in}} = \frac{A_{e,R} G_R}{(4\pi d^2)^2} \eta_p$ da cui, sostituendo l'area

efficace:

6.1 Equazione dei radar

$$\frac{P_{R \leftarrow T}}{P_{in}} = \frac{G_R^2}{4\pi} \left(\frac{\lambda}{4\pi d^2} \right)^2 \eta_p$$

7 Antenna a banda larga

Ricorda: $B \propto \frac{1}{Q}$ dove $Q_{min} = \frac{1}{(ka)^3} + \frac{1}{ka} \approx \frac{1}{(ka)^3}$ ovvero $Q \propto \left(\frac{V_o}{\lambda^2}\right)^{-1} \Rightarrow B \propto \left(\frac{V_o}{\lambda^2}\right)$

7.1 Biconica

- $H_r = E_r = 0$
- $H_\theta = 0 = E_\phi$

- simmetria rotazionale $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$

Maxwell in coordinate cilindriche: $\hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\theta) = -j\omega\mu H_\phi$ $\hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) = j\omega\epsilon E_r = 0$

Sostituisco 1 \rightarrow derivata della 2° e ottengo: $\hat{r} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\phi) = j\omega\epsilon E_r = 0$
 $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2\right) (r \cdot H_\phi) = 0$

Dalla 3 posso dire che $\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\phi) = 0$ e quindi c'è dipendenza solo da r : $H_\phi = \frac{f(r)}{\sin \theta} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2\right) = 0$: **eq. di Helmholtz** con soluzione

$$\text{un'onda TEM: } \begin{cases} H_\phi = \frac{H_0}{\sin \theta} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \\ E_\theta = \eta_0 H_\phi \end{cases}$$

Impedenza

$$Z_C = \frac{V^+(r)}{I^+(r)}$$

Dove la tensione equivalente: $V(r) = \int_\alpha^{\pi-\alpha} \underline{E} \cdot d\underline{l}$ e $I(r) = \int_{\mathcal{C}(r)} \underline{H} \cdot d\underline{l}$. Cioè

- $V(r) = 2\eta_0 H_0 e^{-jk_0 r} \ln \left[\cot \frac{\alpha}{2} \right]$
- $I(r) = H_0 2\pi e^{-jk_0 r}$

Da cui: $Z_C = \frac{\eta_0}{\pi} \ln \left[\cot \frac{\alpha}{2} \right] = 120\eta_0 \ln \left[\cot \frac{\alpha}{2} \right]$

Dimensione finita

Associato ad una l.d.t. con carico Z_L e $Z_{in}(L) = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan k_0 L}{Z_c + jZ_L \tan k_0 L}$ dove $Z_L = \frac{\eta_0^2}{Z_m}$

Da cui, per la parte imm. $Z_{in} \sim -jZ_c \cot(k_0 L) \Rightarrow X_{in}(L) = -120 \ln \left[\cot \frac{\alpha}{2} \right] \cot k_0 L$. Più bassa rispetto al dipolo.

7.2 Dipolo cilindrico

Insieme di biconiche dove $\tan \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2z}$ e quindi: $Z_C(z) \approx 120 \ln \left(\frac{2z}{a} \right)$

$$\Rightarrow \bar{Z}_c = \frac{1}{L/2} \int_0^{L/2} Z_C(z) dz = 120 \ln \left(\frac{L}{a} - 1 \right)$$

e la reattanza d'ingresso: $Y_{in} \approx 120 \ln \left(\frac{L}{a} - 1 \right) \cot \left(k_0 \frac{L}{2} \right)$

7.3 Banda tipica

Antenna	BW
Dipolo a $\lambda/2$	30 %
Dipolo spesso a $\lambda/2$	100 %
Dipolo spesso a λ	130 %
Dipolo ripiegato	45 %
Biconica a $\lambda/2$ con 45°	100 %
Biconica 120°	200 %

7.4 Antenne autoscalanti

Risonanza rispetto la lunghezza d'onda: $l_1 = a\lambda \Rightarrow l_2 = \tau l_1 = \tau a \lambda_1$ ma vale che $\frac{\Delta f_2}{f_2} = \frac{\Delta f_1}{f_1} = B_1$

7.5 Traslazione

$$f_n = \tau f_{n-1} \Rightarrow \ln f_n = \ln \tau + \ln f_{n-1}$$